Uzbek Journal of Physics

Vol.17(№1) 2015 PP.4-8

ЩЕЛЕВЫЕ СОЛИТОНЫ В СЛАБО НЕЛОКАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

Ф.Х. Абдуллаев[1], А.А. Абдумаликов[2], Р.М. Галимзянов[1]

[1]Физико-технический институт АН РУз, Ташкент, Узбекистан
[2] Национальный университет РУз им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан

Узб

Исследованы локализованные состояния на мелкой оптической решетке в нелокальной нелинейной среде. В приближении слабой нелокальности для этой системы получена система уравнений связанных мод и найдены точные щелевые солитонные решения. Для сравнения выполнено численное моделирование модифицированного уравнения Гросс-Питаевского, описывающего столкновение щелевых солитонов.

Localized states on shallow optical lattice in a nonlinear nonlocal media have been investigated. In the approximation of small nonlocality a set of coupled mode equations has been obtaned and exact gap soliton solutions have been found. As a comparision, numerical simulations of the modified Gross-Pitaevskii equation have been carried out that describe scattering of collision of gap solitons.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1987-89 годах были предсказаны щелевые солитоны в периодически неоднородных средах или фотонных кристаллах. Затем были открыты солитоны в фоторефрактивных и жидких кристаллах. Новый класс солитонов возникает в нелинейных резонаторах, квадратично-нелинейных средах и дискретных периодических структурах, а также в диполярных БЭК [1]. Таким образом, сложилась чрезвычайно интересная область физики, посвященная исследованиям оптических солитонов. Солитоны изучаются и во многих других разделах волновой физики. При этом прослеживается ясная аналогия между солитонами разной природы, что позволяет обобщать получаемые результаты и переносить их в малоизученные области науки. Такая ситуация сложилась после экспериментального наблюдения в 1995 г. бозе-эйнштейновского конденсата (БЭК) – нового состояния вещества.

Бозе-эйнштейновский конденсат представляет собой сгусток из одинаковых атомов, охлажденный до крайне низкой температуры порядка 10^{-5} K. Это квантовое состояние большого числа одинаковых квантовых частиц – бозонов, в рассматриваемом случае атомов. «Картина БЭК может рассматриваться как фотография волновой функции, являющейся решением уравнения Шредингера» – говорит один из первооткрывателей В. Каттерле. Уже первые опыты показали, что конденсат обладает когерентными и нелинейными свойствами. Поэтому в конденсате можно наблюдать волны материи, интерференцию и солитоны.

Существование конденсата из бозонов (атомов) было предсказано Бозе и Эйнштейном в 1924–25 годах. Но долгое время не удавалось охладить атомы до миллиардных долей градуса. Этого добились в 1995 г. сразу три научные лаборатории. Они использовали ступенчатое охлаждение атомов щелочных металлов. Конденсация наступала, когда длина волны де-Бройля, обратно пропорциональная температуре, становилась много больше межатомного расстояния. Атомы помещали в магнитную ловушку, которая могла придавать конденсату квазиодномерную или квазидвумерную форму.

Эволюция БЭК из N атомов массой M описывается уравнением Гросса-Питаевского для волновой функции ψ:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M}D\Delta\psi - g\,|\,\psi\,|^2\,\psi + V(x,y,z)\psi,$$

где плотность частиц равна $|\,\psi\,|^2$. Это уравнение полностью эквивалентно нелинейному уравнению Шредингера (НУШ) с добавлением потенциальной функции ловушки, например, в виде параболоида. Константа связи (коэффициент нелинейности) $g = 4\pi\hbar^2 a\,N/M$ пропорциональна длине рассеяния атомов a, обусловленного двойными соударениями. Эта длина и, следовательно, коэффициент нелинейности, могут быть как положительными, так и отрицательными величинами. Знак нелинейности можно менять с помощью магнитного поля, используя эффект Фешбаха (рис. 1). Величина $a > 0$ соответствует притяжению, $a < 0$ – отталкиванию атомов.

II. ЩЕЛЕВЫЕ СОЛИТОНЫ

В нелинейной оптике большое внимание привлекают фотонные кристаллы, имеющие периодическую модуляцию показателя преломления. Обычно фотонный кристалл состоит из чередующихся слоев с разными показателями преломления. Периодическую структуру можно создавать в нелинейных средах с помощью двух встречных оптических волн.

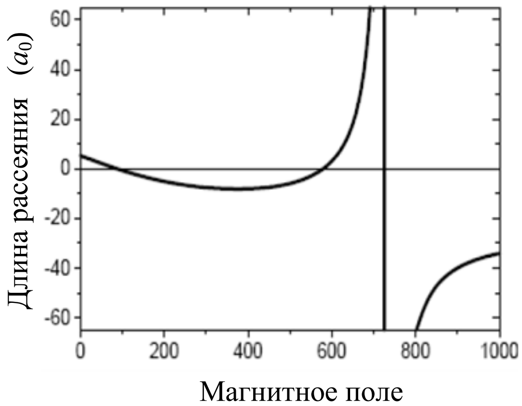

Рис. 1. Резонанс Фешбаха: зависимость длины рассеяния a от магнитного поля для атомов ^{7}Li. Длина рассеяния дана в единицах радиуса Бора. В эксперименте резонанс наступал при напряженности магнитного поля 725 Гс [2].

В сильных оптических полях дисперсия кристалла из-за нелинейности среды меняется, и волна просачивается через кристалл (туннелирует) в виде одного или цуга щелевых солитонов. Щелевые солитоны могут распространяться почти с нулевой скоростью. Если их возбудить внутри решетки, они могут оставаться неподвижными долгое время, сохраняя свою форму.

Аналогичное явление недавно наблюдалось в БЭК. В поле оптической стоячей волны создавался периодический потенциал $V(x) = V_m \sin^2(kx)$, вследствие чего в частотной дисперсии образовывалась щель непропускания, как в фотонном кристалле или брэгговской решетке. Так как БЭК обладает волновыми свойствами, то он повел себя как оптическое излучение в нелинейной периодической решетке. А именно, часть конденсата образовала неподвижный щелевой солитон (рис. 2).

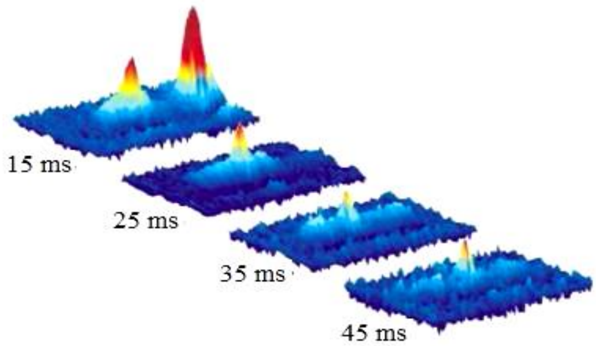

Рис. 2. Динамика БЭК в периодической решетке, созданной двумя встречными лазерными пучками (в потенциале оптической стоячей волны). Показано распределение атомов в различные моменты времени. После 25 мс формируется маленький пик, форма и амплитуда которого не меняется. Избыточные атомы излучаются или рассеиваются со временем. После 45 мс отчетливо наблюдается только один солитон, содержащий 250 атомов. Периодический потенциал *V* создается стоячей световой волной на нерезонансной длине волны 783 нм [3].

Мы исследуем щелевые солитоны на мелкой решетке со слабо нелокальной нелинейностью БЭК, которая описывается уравнением Гросс-Питаевского. В квазиодномерном случае это уравнение в безразмерных единицах имеет вид

$$iu_t + u_{xx} - \epsilon V_0 \cos(2x)u + u\int_{-\infty}^{\infty} dyK(x-y)\,|u(y,t)|^2 = 0, \qquad (1)$$

где $\epsilon \ll 1$, V_0 – глубина решетки, $K(x-y)$ обеспечивает диполярное взаимодействие. В БЭК пространственная нелокальность появляется за счет диролярного взаимодействия атомов с внешним полем.

Сделаем несколько предположений по уравнению (1):

1. Пусть $K(x)$, ядро интегрального члена в уравнении (1), является быстро спадающей функцией *x,* предполагая ее слабой. Если нелокальность имеет тепловой характер, то $K(x)$ хорошо модулируется гауссовским профилем. В этом случаи ядро $K(x)$ можно разложить в ряд Тейлора в окрестности $y \to x$, т.е

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dyK(x-y)\,|u(y,t)|^2 &\approx \int_{-\infty}^{\infty} dyK(y)\,|u(x,t)|^2 + \\ +\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dyK(y)y^2(|u(x,t)|^2)_{xx} &= \gamma_1 |u|^2 + \gamma_2(|u|^2)_{xx}.\end{aligned} \qquad (2)$$

где $\gamma_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dyK(y),\ \ \gamma_2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dyK(y)y^2$.

Тогда уравнение (1) примет вид

$$iu_t + -\epsilon V_0 \cos(2x)u + \gamma_1 |u|^2\, u + \gamma_2(|u|^2)_{xx} u = 0. \qquad (3)$$

2. Введем медленные координаты и время: $T = \epsilon t,\ X = \epsilon x.$

3. Решение уравнение (3) будем искать в виде суммы двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$u(x,t) = \sqrt{\epsilon}\left[A(X,T)\exp(x-it) + B(X,T)\exp(-x-it)\right], \qquad (4)$$

При этом, сохраняя первые неисчезающие члены, пропорциональные ϵ и считая решение широким по сравнению с характерным размером нелокальности, пренебрежем производными второго порядка по координатам и, наконец, отбросим быстро осциллирующие члены, пропорциональные $\sim \exp(\pm 3ix)$. В результате приходим к системе уравнений связанных мод [4]:

$$\begin{aligned} &iA_T + 2iA_X - \frac{V_0}{2}B + (\gamma_1 |A|^2 + 2(\gamma_1 - 2\gamma_2)|B|^2)A = 0,\\ &iB_T - 2iB_X - \frac{V_0}{2}A + (\gamma_1 |B|^2 + 2(\gamma_1 - 2\gamma_2)|A|^2)B = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

III. ДВИЖУЩИЙСЯ ЩЕЛЕВОЙ СОЛИТОН

Локализованное решение уравнений связанных мод в виде щелевого солитона можно построить методом, развитым в работе [5]. Перейдем к бегущим координатам $\xi = x - \upsilon t$ и будем искать решение уравнения (4) в виде:

$$A = \Delta\sqrt{\rho(\xi)}\exp(-i\theta^A(\xi) - i\Omega T), \quad B = \frac{\sqrt{\rho(\xi)}}{\Delta}\exp(-i\theta^B(\xi) - i\Omega T), \tag{6}$$

где $\Delta^4 = (2+\upsilon)/(2-\upsilon)$, υ – скорость, $\sqrt{\rho(\xi)}$ – амплитуда, $\theta^A(\xi)$, $\theta^B(\xi)$ – фазы и Ω – несущая частота. Интегрируя (4) получим

$$\begin{aligned} &\theta(\xi) = -2\arctan\left[\gamma\tanh(\tilde{\beta}\xi)\right],\\ &\rho(\xi) = \frac{2}{\tilde{g}}\left(\frac{V_0}{2}\right)\cos\left[\theta^B(\xi) - \theta^A(\xi) - \tilde{\Omega}\right],\\ &\theta^B(\xi) + \theta^A(\xi) = \frac{1}{2}\upsilon\tilde{\Omega}\lambda\xi + \upsilon\frac{4}{\tilde{g}}\gamma_1\lambda^2\arctan\left[\gamma\tanh(\tilde{\beta}\xi)\right], \end{aligned} \tag{7}$$

где $\tilde{g} = \left(2 + \frac{1+\upsilon^2/4}{1-\upsilon^2/4}\right)\gamma_1 - 4\gamma_2$, $\tilde{\beta} = \frac{\lambda}{2}\sqrt{V_0^2 - 2\tilde{\Omega}^2}$, $\tilde{\Omega} = \lambda\Omega$, $\theta(\xi) = \theta^B(\xi) - \theta^A(\xi)$.

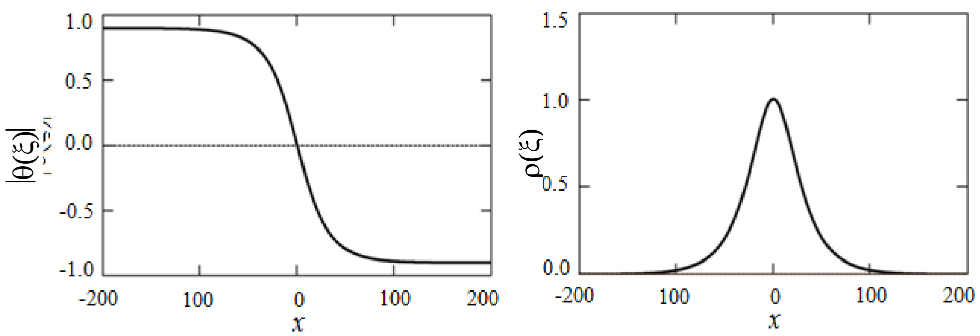

Рис. 3. Зависимость разности фаз и амплитуды солитонов вида (7) от координаты для $\gamma_1 = 2.13$, $\gamma_2 = 1.53$, $\varepsilon = 0.15$, $\upsilon = 0.4$ и $\Omega = 0.05$.

На рис. 3 представлены зависимости от координаты ξ разности фаз и квадрат амплитуды солитонного решения уравнения связанных мод (6). Результаты численного моделирования модифицированного уравнения Гросс-Питаевского (3) представлены на рис. 4.

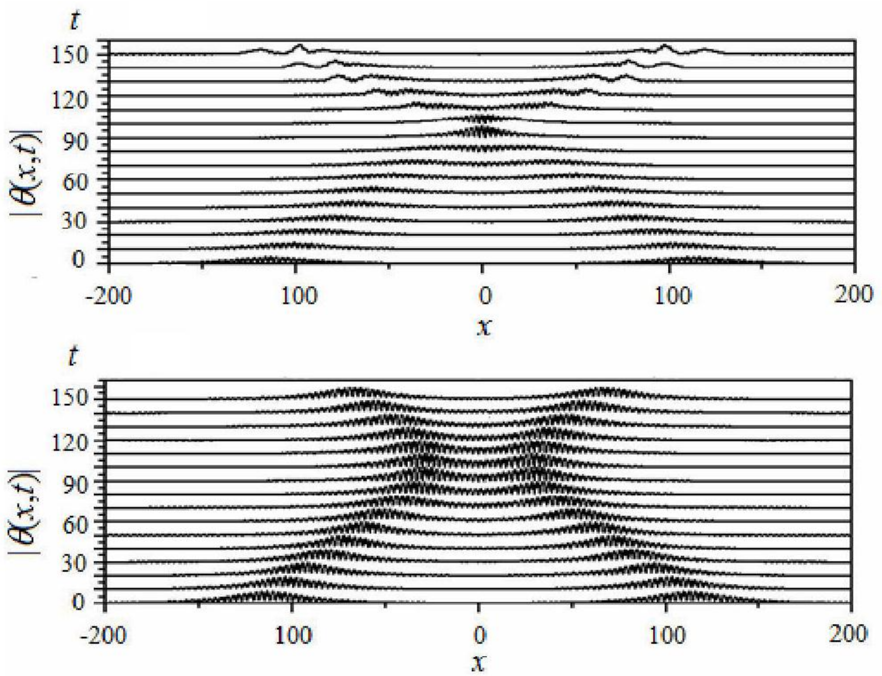

Рис. 4. Столкновение двух движущихся солитонов вида (3) в среде с гауссовской нелокальностью с $\sigma = 1.2$ и при $\varepsilon = 0.15$, $\upsilon = 1$, и $\Omega = 0.05$, $\gamma_2 = 0.77$; верхний рисунок для $\gamma_1 = 2.13$, нижний – для $\gamma_1 = 0$.

На верхнем графике рис. 4 видно, что при $\gamma_1 \neq 0$ столкновение щелевых солитонов не совсем упругое. Солитоны после столкновения теряют свою форму, оставаясь при этом локализованными образованиями. Весьма интересным представляется столкновение щелевых солитонов, представленное на нижнем графике рис. 4 при $\gamma_1 = 0$. Очевидно, что в этом случае мы имеем дело с чистыми солитонами. Видно, что столкновение щелевых солитонов является абсолютно упругим.

ЛИТЕРАТУРА

1. 1W. Krolikowski *et al.*, Phys. Rev. A **77**, 033825 (2008).
2. K.E. Strecker *et al.*, Nature **417**, 150 (2002).
3. 2B. Eiermann, Th. Anker, M. Albiez, M. Taglieber, P. Treutlein, K.-P. Marzlin, and M.K. Oberthaler, Phys. Rev. Lett. **92**, 230401 (2001).
4. 3F.Kh. Abdullaev, A.A. Abdumalikov, R.M. Galimzyanov, Phys. Lett. A **367**, 149 (2007).
5. 4 A.B. Aceves and S. Wabnitz, Phys. Lett. A **141**, 4 37 (1989); D.N.Christodoulides and R.I. Joseph, Phys. Rev. Lett. **62**, 1746 (1989).

Ф.Х.Абдуллаев, А.А. Абдумаликов, Р.М. Галимзянов. Щелевые солитоны в слабо нелокальной нелинейной среде

F.Kh. Abdullaev, A.A. Abdumalikov, R.M. Galimzyanov. Gap solitons in a nonlinear media with small nonlocality